Tema 2: Espacios Vectoriales

Introducción

La primera noción de la que podemos hablar es del sentido geométrico del espacio vectorial. Para ello conocemos lo que es el **vector geométrico**, que no es más que una representación en el plano o en el espacio de un segmento con una dirección y un sentido.
Dos vectores geométricos v_1 y v_2 son iguales si y solo si tienen igual magnitud, dirección y sentido.
Podemos definir la suma de dos vectores geométricos mediante la regla del paralelogramo, y esta suma no depende de la orientación de los segmentos.
Además, dados dos puntos, podemos construir el segmento orientado que forman y tener un vector. Este proceso se hace restando coordenada a coordenada.

Espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$

Definición: Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Llamamos espacio vectorial sobre el cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ a cualquier 3-tupla $(E, \oplus, \circ)$ formada por un conjunto no vacío E, una operación $\oplus : E \times E \to E$ y una función (producto por escalares) $\circ : \mathbb{K} \times E \to E$ de manera que se satisfagan las siguientes propiedades:

1. $\forall u, v \in E, (u \oplus v = v \oplus u)$
2. $\forall u, v, w \in E, ((u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w))$
3. Siendo $0 \in E$, el elemento neutro de "$\oplus$", $\forall u \in E, (0 \oplus u = u)$
4. $\forall u \in E, \exists -u \in E, (u \oplus -u = -u \oplus u = 0)$
5. $\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha \circ (u \oplus v) = \alpha \circ u \oplus \alpha \circ v)$
6. $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, ((\alpha + \beta) \circ u = \alpha \circ u \oplus \beta \circ u)$
7. $\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, ((\alpha \cdot \beta) \circ u = \alpha \circ (\beta \circ u))$
8. Siendo $1 \in \mathbb{K}$, el elemento neutro de "$\cdot$", $\forall u \in E, (1 \circ u = u)$

A los elementos de $\mathbb{K}$ se les llama escalares y a los elementos de E se les llama vectores. Por tanto, el término vector servirá para designar un elemento del espacio vectorial. Además, para evitar la excesiva notación, usaremos siempre los signos de $+$ y $\cdot$ para todas las operaciones.

Ejemplo:

- Las matrices fila con coeficientes reales $M_{1xn}(\mathbb{K})$ con respecto de la suma de filas y producto de una fila por un número.
- Los vectores geométricos del plano y del espacio respecto a la suma de vectores y producto por escalares definidos antes.
- Las matrices de orden mxn con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ con la suma y producto por escalares definidos antes: $M_{mxn}(\mathbb{K})$
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$
- $\Pi_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n / a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ con la suma de polinomios y el producto por escalares usual.
- $(C_0(\mathbb{R}), +, \cdot)$, conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con la suma y producto de funciones usuales.
- Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un $(\mathbb{K}, +, \cdot)$-espacio vectorial. Por tanto tenemos que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$ y todos los cuerpos que conocemos son espacios vectoriales sobre ellos mismos.

- $A = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ donde se definen las operaciones $(a + b\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{3}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{3}$ y $\alpha(a + b\sqrt{3}) = \alpha a + \alpha b\sqrt{3}$

Observación: A partir de ahora, para referirnos a un espacio vectorial, usaremos una notación más abreviada y diremos simplemente que E es un $\mathbb{K}$-e.v. en lugar de detallar todas las operaciones de ambos.

Propiedades de vectores

1. $\forall u \in E, 0 \cdot u = 0$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot 0 = 0$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\alpha \cdot u = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \quad \text{ó} \quad u = 0))$
4. $\forall u \in E, (-1) \cdot u = -u$
5. $\forall \in \mathbb{K} - \{0\}, \forall u, v \in E, ((\alpha \cdot u = \alpha \cdot v) \Rightarrow (u = v))$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E - \{0\}, ((\alpha \cdot u = \beta \cdot u \Rightarrow (\alpha = \beta))$

Demostración:

1. Dado $u \in E$
$$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$$
y como el único elemento idempotente del grupo $(E, +)$ es el elemento $0 \in E$, concluimos que $0 \cdot u = 0$.

2. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$
$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$$
y razonando como la propiedad anterior tenemos que $\alpha \cdot 0 = 0$.

3. Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in E$, y supongamos que $\alpha \cdot u = 0$. Caben dos posibilidades:
   - Si $\alpha = 0$, entonces no hay nada que demostrar.
   - Si $\alpha \neq 0$, entonces consideramos $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$. Multiplicando a ambos lados de la igualdad tenemos:
   $$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$$
   $$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot u) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot u = 1 \cdot u = u$$
   y por tanto tenemos que $u = 0$

4. Semejante razonamiento a 3

5. Sea $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, $u, v \in E$ supongamos que $\alpha \cdot u = \alpha \cdot v$. Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por α^{-1} obtenemos:
$$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot v)$$
o lo que es lo mismo
$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot u = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot v$$
de donde $u = v$.

6. Razonamiento similar al 5.

Producto cartesiano de espacios vectoriales

Si $(E_1, +_1, \cdot_1), \cdots, (E_n, +_n, \cdot_n)$ son n $\mathbb{K}-e.v.$, entonces el conjunto $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ tiene estructura de espacio vectorial respecto de las operaciones:

$$+ : E \times E \to E$$

$$((u_1, \cdots, u_n), (v_1, \cdots, v_n)) \to (u_1 +_1 v_1, \cdots, u_n +_n v_n)$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$

$$(\alpha, (u_1, \cdots, u_n)) \to (\alpha \cdot_1 u_1, \cdots, \alpha \cdot_n u_n)$$

En particular, tenemos que si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}-$e.v.

Ejemplo:

- $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}^2, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_2^{32}, +, \cdot)$

Subespacios vectoriales

La idea de subespacio es un subconjunto de un espacio vectorial que tiene todas las propiedades de un espacio vectorial.

Definición: Si E es un $\mathbb{K}-$e.v. y $H \subset E$, se dice que H es un subespacio vectorial de E si:

1. $H \neq \emptyset$
2. $\forall u, v \in H, u + v \in H$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in H, \alpha u \in H$

En cuanto a notación, escribiremos que $H \prec E$.

Proposición: Sea E un $\mathbb{K}-$e.v. y $H \subset E$. Se verifica que $H \prec E$ si y solo si:

1. $0 \in H$
2. $\forall u, v \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se verifica que $(\alpha u + \beta v) \in H$

Observación: De la definición de subespacio vectorial se sigue que, siendo E un $K-$e.v. se verifica que $E \prec E$ y que $\{0\} \prec E$.
Además es fácil comprobar que si $H \prec E$, $u_1, \cdots, u_n$ son vectores de H y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son escalares, necesariamente $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in H$.

Ejemplo: ¿Son subespacios vectoriales?

- Sea $A \in M_{mxn}, \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$
- $\{A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) | det(A) = 0\}$
- $S_1 = \{(x, y, z) | 2x + y - 3z = 1, x - 2y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- $S_2 = \{(x, y, z) | x^2 + 2y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- $S_3 = \{(0, 0, a) | a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$
- $S_4 = \{(a, 0, 1) | a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$
- $S_5 = \{(x, y, z) | x - 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- $S_6 = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- $S_3 \cap S_4$

- $\{A \in M_{nxm} | A^t = A\}$, matrices simétricas.
- Las matrices triangulares superiormente, inferiormente y diagonales.

Observación: Cabe destacar que un subespacio vectorial es a su vez un espacio vectorial y podemos tratarlo como tal, sin considerar que está contenido en un espacio vectorial más grande.

Definición: Sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales. Definimos el espacio intersección como:

$$A = U_1 \cap U_2 = \{v \in A | v \in U_1 \ y \ v \in U_2\}$$

Tiene estructura de subespacio vectorial.

Definición: Sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales. Definimos el espacio suma como:

$$U_1 + U_2 = \{u + v | u \in U_1, v \in U_2\}$$

Tiene estructura de subespacio vectorial.

Definición: Sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales. Definimos la suma directa de U_1 y U_2 como $U_1 \oplus U_2$ si se cumple que $U_1 + U_2$ es el total y que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Definición: Diremos que un espacio V es suma directa de dos subespacios U_1 y U_2 si y solo si $\forall v \in V$ se puede escribir de manera única como suma de un vector de U_1 y uno de U_2.

Dependencia e independencia lineal

Definición: Si E es un $\mathbb{K}-$e.v., un sistema de vectores de E es cualquier secuencia finita de vectores de E. Así, si $u_1, \cdots, u_n \in E$, la secuencia $u_1, \cdots, u_n$ es un sistema de n vectores de E. En general escribiremos $\{u_1, ..., u_n\}$ para referirnos al sistema $u_1, \cdots, u_n$.

Definición: Si $\{u_1, ..., u_n\}$ es un sistema de vectores de E, diremos que $v \in E$ es combinación lineal de $u_1, ..., u_n$ si $\exists(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$.

Observemos que si $v \in E$ es combinación lineal de $u_1, ..., u_n$, también diremos que $v \in E$ depende linealmente de $u_1, ..., u_n$.

Definición: Si $\{u_1, ..., u_n\}$ es un sistema de vectores de E, diremos que es un sistema linealmente independiente si $\forall(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tenemos que si $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Por tanto, un sistema será linealmente dependiente si $\exists(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n - \{(0, 0, ..., 0)\}$ tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$.

Ejemplos:

1. $(11, 7)$ depende linealmente de $\{(2, 1), (1, 0), (3, 2)\}$
2. $(-3, 0)$ depende linealmente de $\{(1, 1), (1, 4)\}$
3. $\{(0, 1), (2, 2), (-1, 1)\}$
4. $\{x^2 + 1, x^2 - x - 1, x + 1\}$

Definición: Si E es un $\mathbb{K} - e.v.$ y $A \subset E$ denotaremos por $L(A) = \{v \in E | v$ es combinación lineal de un sistema de vectores de $A\}$

Proposición: Sean E un $\mathbb{K} - e.v.$ y $A \subset E$. Se verifica que:

- $L(A) \prec E$
- $A \subset L(A)$

- $\forall H' \prec E$ se cumple que $A \subset H' \Rightarrow L(A) \subset H'$

Definición: Si E es un $\mathbb{K} - e.v.$ y $\{u_1, ..., u_n\}$ un sistema de vectores de E, al subespacio vectorial $L(\{u_1, ..., u_n\})$ se le denomina subespacio vectorial generado por el sistema $\{u_1, ..., u_n\}$ y del sistema $\{u_1, ..., u_n\}$ se dice que es un sistema generador de $H = L(\{u_1, ..., u_n\})$. A este subespacio también lo denotaremos por $L(u_1, ..., u_n)$.

Observación: Nótese que si todo vector de E se puede expresar como una combinación lineal de $\{u_1, ..., u_n\}$, resulta que el subespacio vectorial generado por $\{u_1, ..., u_n\}$ es $H = L(\{u_1, ..., u_n\}) = E$, que obviamente es un subespacio vectorial de E.

Ejemplos:

1. $(1, 0)$ y $(0, 1)$ forman un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, puesto que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$.
2. Análogamente para $\mathbb{R}^3$ también lo tenemos.
3. Los polinomios $1, x, x^2, ..., x^n$ constituyen un sistema generador de los polinomios de grado n, denotado por $P_n(\mathbb{R})$.
4. El sistema $(1, 0), (0, 1)$ y $(3, 1)$ también es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Nos interesa tener sistemas de generadores con el menor número posible de elementos.

Observación: Un sistema linealmente independiente también lo llamamos libre, y a uno linealmente dependiente, ligado.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}^2$ con la estructura usual de espacio vectorial, tenemos que el sistema $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es linealmente independiente. Igualmente pasa con otras dimensiones de $\mathbb{R}^n$.
2. En $\mathbb{R}^2$ el sistema $\{(2, 1), (1, 0), (3, 2), (11, 7)\}$ es linealmente dependiente.

Proposición: Si $\{u_1, ...u_n\}$ es un sistema de vectores del $\mathbb{K} - e.v.$ E, se verifica que $u_1, ..., u_n$ es libre si y sólo si $\forall v \in E$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \ y \ v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \Rightarrow (\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\beta_1, ..., \beta_n)$$

Proposición: Si $\{u_1, ..., u_n\}$ es un sistema de vectores del $\mathbb{K} - e.v.$ E, se verifica que $u_1, ..., u_n$ es ligado si y sólo si $\exists\, i \in \{1, ..., n\}$ tal que u_i es combinación lineal de $\{u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n\}$.

Proposición: Si E es un $\mathbb{K} - e.v.$ y $n, r, m \in \mathbb{N}$, se verifica que:

1. Si $u \in E$ y $u \neq 0 \Rightarrow u$ es libre.
2. Si $u_1, ..., u_n$ es libre y $r \leq n$, entonces $u_1, ..., u_r$ es libre.
3. Si $u_1, ..., u_n$ es tal que $\exists\, i \in \{1, ..., n\}$ de manera que $u_i = 0$, entonces el sistema $u_1, ..., u_n$ es ligado.
4. Si $u_1, ..., u_n$ es ligado entonces $\forall\ v_1, ..., v_m \in E$ el sistema $\{u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m\}$ es ligado.

Proposición: Si $\{u_1, ..., u_n\}$ es un sistema de vectores del $\mathbb{K} - e.v.$ E libre y $v \in E$ no es combinación lineal de $u_1, ..., u_n$ entonces el sistema $\{u_1, ..., u_n, v\}$ es libre.

Corolario: Si $\{u_1, ..., u_n\}$ es un sistema de vectores del $\mathbb{K} - e.v.$ E libre y $v \in E$ son tales que $\{u_1, ..., u_n\}$ es libre y $\{u_1, ..., u_n, v\}$ es ligado, entonces v es combinación lineal de $u_1, ..., u_n$.

Bases y dimensión

Todo lo estudiado anteriormente es suficiente para estudiar los sistemas de vectores que son a la vez sistemas generadores y libres.

Definición: Dados un $\mathbb{K}$- e.v. E y $H \prec E$, se dice que un sistema $u_1, ..., u_n$ de vectores de H es una base de H si $u_1, ..., u_n$ es libre y $\forall v \in H$ se verifica que v es combinación lineal $u_1, ..., u_n$.

En otras palabras, una base de un $\mathbb{K}-$ e.v. E es un sistema de vectores de E que es simultáneamente libre y generador.

Nota: Si $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base de un $\mathbb{K}-$ e.v. E, es usual escribir $B = \{u_1, ..., u_n\}$ para denotarla. Todo vector $v \in E$ se escribe en la forma $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, donde los coeficientes $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ están unívocamente determinados. Esta situación justifica la definición de base ordenada: una base ordenada $B = (u_1, ..., u_n)$ de un $\mathbb{K}-$ e.v. E es un sistema de vectores libre, generador y ordenado.

Ejemplos:

1. El sistema de vectores $\{(1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.
2. En $\mathbb{R}^2$ el sistema $\{(2, 1), (-1, 1)\}$.
3. $1, x, ..., x^n$ es base de $P_n(\mathbb{C})$.

Definición: Si $B = (u_1, ..., u_n)$ es una base ordenada del $\mathbb{K}-$ e.v. E y $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ a la matriz $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ la denominaremos matriz de coordenadas del vector v respecto a la base B, o simplemente coordenadas del vector v respecto de B, y la denotaremos por $(v)_B$.

Ejemplos:

1. En el espacio $\mathbb{R}^3$ con la base $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, el vector $(3, -2, 1)$ tiene por matriz de coordenadas a $(3, -2, 1)_B$.
2. En el espacio $P_3(\mathbb{C})$ con la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ resulta que el polinomio $(2x^3 + x - 5)$ tiene por matriz de coordenadas a $(-5, 1, 0, 2)_B$
3. En el espacio $\mathbb{R}^2$ con la base $B = \{(1, 0), (0, 1\}$ y la base $B' = \{(2, 1), (-1, 1)\}$, el vector $(3, 3)$ tiene por matriz de coordenadas a $(3, 3)_B$ y a $(2, 1)_{B'}$.

Definición: Se dice que un $\mathbb{K}-$ e.v E es de dimensión finita si $\exists\ n \in \mathbb{N}$ y $\exists\ u_1, ..., u_n$, sistema de vectores de E tal que $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base de E.

Ejemplo: Se verifica que $\mathbb{R}^n$ es un espacio finitamente generado.

Equipotencia de bases

Proposición: Sean E un $\mathbb{K}-$ e.v., $\{u_1, ..., u_n\}$ una base de E y $\{v_1, ..., v_m\}$ un sistema de vectores de E con $m > n$. En estas condiciones el sistema $\{v_1, ..., v_m\}$ es ligado.

Es claro que por ejemplo, cualquier sistema de 4 vectores o más en $\mathbb{R}^3$ es ligado.

Corolario: Si E es un $\mathbb{K}-$ e.v. finitamente generado y

$$B = \{u_1, ..., u_n\} \quad y \quad B' = \{v_1, ..., v_m\}$$

son bases de E, se verifica necesariamente que $n = m$.

Definición: Si E es un $\mathbb{K}-$ e.v. de dimensión finita y $(u_1, ..., u_n) \in E^n$ es una base de E, diremos que la dimensión de E es n y escribiremos $dim(E) = n$.

Ejemplos:

1. En el espacio $\mathbb{R}^3$ con la base $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, tiene dimensión 3. Generalizando, el espacio $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n.
2. En el espacio $P_3(\mathbb{C})$ con la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ resulta que su dimensión es 4. Generalizando, la dimensión de $P_n(\mathbb{C})$ es $n+1$.
3. 1 es una base del espacio $\mathbb{K}$, entonces tiene dimensión 1.

Proposición: Si E es un $\mathbb{K}-$ e.v. y $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base de E, entonces se verifica que:

- $\{v_1, ..., v_m\}$ sistema de vectores de E y $m > n$ entonces $\{v_1, ..., v_m\}$ es ligado.
- $\{v_1, ..., v_n\}$ sistema libre de vectores de E entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es base.
- $\{v_1, ..., v_n\}$ sistema generador de E entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es base.

Ejercicio: Verificar que el sistema $\{1, 1+x, x^2\}$ es una base de $P_2(\mathbb{C})$.

Subespacios vectoriales y dimensión

Si E es un $\mathbb{K}-$ e.v. de dimensión finita y $H \prec E$, entonces H también es de dimensión finita y $dim(H) \leq dim(E)$, puesto que cualquier sistema de vectores de H también es un sistema libre de vectores de E. Nótese además que si H es un subespacio vectorial de E tal que $dim(H) = dim(E)$, se verifica necesariamente que $H = E$.

Proposición: Si E es un $\mathbb{K}-$ e.v. finitamente generado con $dim(E) = n$, $H \prec E$ y $(u_1, ..., u_m) \in H^m$ es una base de H con $m < n$ entonces existe

$$(u_{m+1}, ..., u_n) \in E^{n-m}$$

tal que $(u_1, ..., u_m, u_{m+1}, ..., u_n)$ es una base de E.
Es claro que este mismo razonamiento se puede aplicar directamente a E.

Nota: Dados un $\mathbb{K}-$ e.v. E y $H \prec E$ si $dim(H) = 1$ se dice que H es una recta de E, si $dim(H) = 2$ se dice que H es un plano de E; y si $dim(E) = n$ y $dim(H) = n-1$ se dice que H es un hiperplano de E. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ se puede ver claramente estos ejemplos.

Algoritmo de extensión de una base

Sea H un subespacio de dimensión k de un espacio vectorial E de dimensión finita n. Dada una base $B_H = \{u_1, ..., u_k\}$ de H, queremos determinar un algoritmo para extender la base B_H hasta obtener una base B_E del espacio vectorial E en el que H está sumergido.
Sea H una base pre-fijada del espacio total E. Es suficiente considerar la matriz U cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\{u_1, ..., u_k\}$ (que constituyen la base B_H del subespacio vectorial H) respecto de la base B_H, añadir a esa matriz los vectores columna de la matriz identidad de orden la dimensión del espacio total E (el rango de la nueva matriz $(U|I_n)$ es n) y aplicar el método de Gauss por columnas sin intercambiar el orden de las columnas y sin hacer 0 las k primeras, porque son las que queremos extender. Las n columnas no nulas de la matriz gaussiana G obtenida son las coordenadas, respecto de la base B_E, de los n vectores de una base del espacio total E ($rango(G) = rango(U|I_n)$). Ahora, las columnas de la matriz original $(U|I_n)$ correspondientes a las columnas no nulas de G dan las coordenadas, respecto de la base B_E, de n vectores que son una extensión de la base B_H.

Ejemplo: Sea $E = \mathbb{R}^4$ y $B = B_4$, la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Sea $H = L[u_1, u_2]$, donde $u_1 = (1,-1,2,0), u_2 = (1,1,1,1)$.

Observación: Como ya vimos en el tema anterior, el rango de una matriz es el máximo número de filas o columnas linealmente independientes, es decir, al aplicar el método de Gauss, el número de columas o filas distintas de cero. Sabiendo esto, si colocamos un sistema de vectores cualesquiera por columnas en una matriz, podemos saber cuántos vectores son linealmente independientes (y cuáles). Nos basta con calcular el rango de la matriz que hemos creado, obteniendo así el dato que buscamos.

Ejemplo: Estudiar la dependencia o independencia lineal del sistema $\{(1,2,3),(-5,1,2),(6,1,1)\}$.

Observación: Existe un isomorfismo entre los vectores y sus coordenadas. Por tanto, estudiar los vectores y estudiar sus coordenadas es lo mismo, y las coordenadas son más fáciles de estudiar porque están en $\mathbb{K}^n$

Ejemplo: Calcular base de un subespacio dado por ecuaciones

Coordenadas respecto a una base

Una vez fijada la base, podemos trabajar con las coordenadas. Las coordenadas están en $\mathbb{K}^n$ (si el espacio vectorial tiene dimensión n) y por tanto trabajar con ellas es muy sencillo. Está definida la suma y el producto por escalares y estas operaciones son intuitivas y muy fáciles de realizar. Vamos a estudiar qué pasa en los subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^n$.

Si U es un subespacio vectorial de K^n entonces sabemos que debe ser de dimensión finita y estará por tanto generado por una base de vectores

$$\begin{cases} v_1 = (v_{11}, ..., v_{1n}) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ v_m = (v_{m1}, ..., v_{mn}) \end{cases}$$

donde $m \leq n$. Por tanto, los vectores $(x_1, ..., x_n)$ de U son de la forma

$$(x_1, ..., x_m) = \alpha_1(v_{11}, ..., v_{1n}) + ... + \alpha_m(v_{m1}, ..., v_{mn})$$

para $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$. A esta ecuación se la conoce como la *ecuación vectorial* de U. Si expresamos la igualdad anterior coordenada a coordenada obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 v_{11} + ... + \alpha_m v_{m1} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ x_n = \alpha_1 v_{1n} + ... + \alpha_m v_{mn} \end{cases}$$

las cuales son conocidas como *ecuaciones paramétricas* del subespacio vectorial U.

Las otras ecuaciones que tenemos son las *ecuaciones implícitas* de U. Para calcularlas, nos hace falta una base del subespacio U (o un sistema generador y coger una base de ese sistema). Una vez que lo tengamos, ponemos esos vectores por columnas y añadimos una columna más con las incognitas que necesitemos. Ahora debemos hacer el determinante de esta matriz, y si no es cuadrada, hacer tantos determinantes como combinaciones posibles haya.

Ejemplo: Obtener las ecuaciones de $U = L[(1,2,1),(0,1,1)]$.

Cambio de base

En esta sección, dadas dos bases $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ del espacio vectorial V y queremos saber cómo calcular las coordenadas de un vector $w \in V$ respecto de la base B' si conocemos sus coordenadas respecto de B. Es decir, que si sabemos que las coordenadas de w respecto de B son:

$$w = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n = (x_1, x_2, ..., x_n)_B$$

queremos calcular sus coordenadas

$$w = x'_1v_1 + x'_2v_2 + ... + x'_nv_n = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)_{B'}$$

respecto de B'.

Para ello, necesitamos conocer las coordenadas de los vectores de B respecto de B'. Supongamos que son:

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1})_{B'} \\ u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{n2}v_n = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2})_{B'} \\ \qquad . \\ \qquad . \\ u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{nn})_{B'} \end{cases}$$

Tenemos entonces que sustituyendo los vectores $u_1, ..., u_n$ por las expresiones anteriores

$$w = x_1u_1 + ... + x_nu_n = x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n) + ... + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n) =$$

$$= (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n)v_1 + ... + (a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n)v_n$$

y como las coordenadas respecto de B' son únicas en virtud del Teorema de unicidad de coordenadas se tiene que

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \qquad . \\ \qquad . \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

que son las ecuaciones del cambio de base de B a B'. De esta forma, conociendo las coordenadas de w respecto de B, podemos conocer las coordenadas respecto de B' sin más que sustituir en las ecuaciones del cambio de base de B a B'.

Ejemplo: Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial V y sea otra base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que se verifican las relaciones:

$$u_1 = v_1 + v_2; \quad u_2 = 2v_1 - v_2; \quad u_3 = 3v_3$$

Calcular las coordenadas del vector $w = (5, -1, 5)_B$ en base B'.

Cambio de base en forma matricial

Sean de nuevo $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $B' = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bases de V. Si conocemos las coordenadas de los vectores de B respecto de la base B'

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1})_{B'} \\ u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{n2}v_n = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2})_{B'} \\ \qquad . \\ \qquad . \\ u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{nn})_{B'} \end{cases}$$

hemos visto que para cualquier vector $w \in V$ si sus coordenadas respecto de estas bases son respectivamente

$$w = (x_1, x_2, ..., x_n)_B = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)_{B'}$$

entonces las ecuaciones del cambio de base de B a B' están dadas por

$$\left\{ \begin{array}{r} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ . \\ . \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones podemos escribirlas matricialmente como

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}_{B \to B'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

donde las coordenadas del vector están dadas en matrices columna (los subíndices B y B' nos ayudan a recordar respecto a qué base están esas coordenadas). A la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base B como combinación lineal de los de B' la llamamos matriz del cambio de base de B a B'.

Ejemplo: Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial V y sea otra base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que se verifican las relaciones:

$$u_1 = v_1 + v_2; \quad u_2 = 2v_1 - v_2; \quad u_3 = 3v_3$$

Calcular las coordenadas del vector $w = (5, -1, 5)_B$ en base B'.

Teorema: Sean B y B' bases del espacio vectorial V. Si A es la matriz de cambio de B a B' y A' es la matriz de cambio de B' a B entonces $A' = A^{-1}$.

Ejemplo: Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y sea otra base $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que se verifican las relaciones:

$$u_1 = v_1 + 2v_2; \quad u_2 = v_2 + 2v_3; \quad u_3 = v_3 + 2v_4; \quad u_4 = 5v_4$$

Calcular las coordenadas del vector $w = (1, -1, -1, 1)_B$ en base B'.